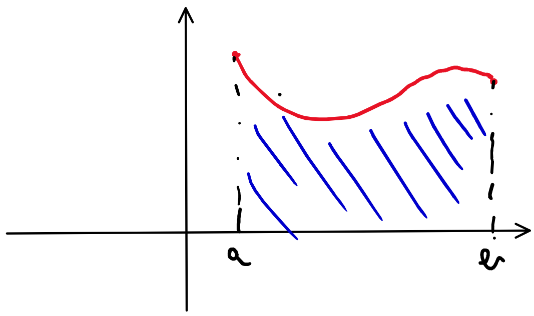
MATEMATICA - LEZIONE 34

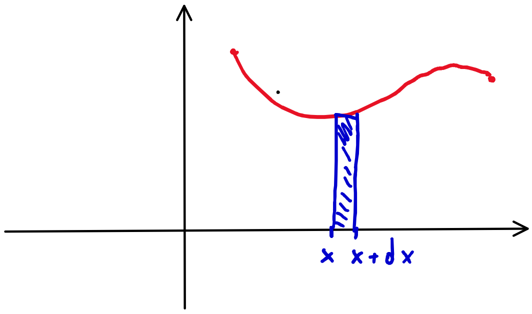
mercoledì 26 novembre 2025 09:07

Integrali:



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Vogliamo calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico della funzione f e l'asse x

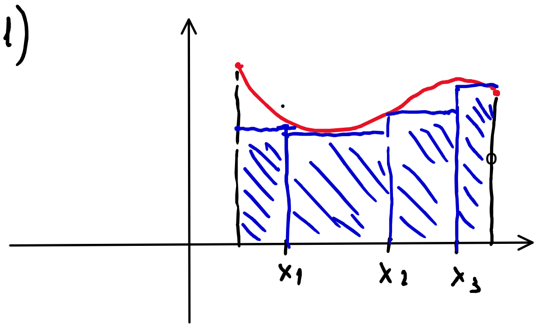


1) Come si definisce rigorosamente $\int_a^b f(x)\,dx$?

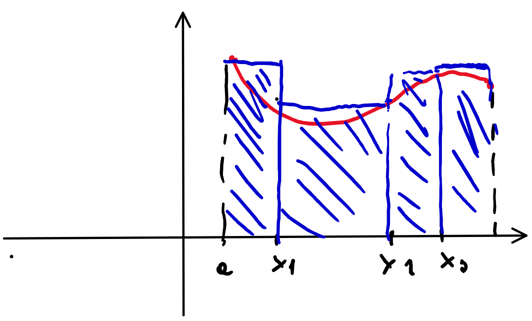
2) Come si calcola $\int_a^b f(x)\,dx$?

---

1)



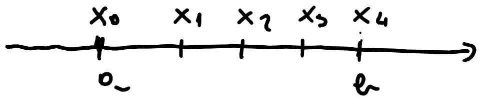
Costruiamo una famiglia di rettangoli che approssimano dal basso il grafico di f. La somma delle di questi rettangoli è un'approssimazione dal basso dell'area che vogliamo calcolare.



Se invece prendiamo rettangoli che approssimano dall'alto il grafico della funzione, otteniamo un'approssimazione dall'alto dell'area da calcolare

Def Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una SUDDIVISIONE o PARTIZIONE DI $[a,b]$ è un insieme finito $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ tale che

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$



$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k]$$

Def 2 Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Sia P una suddivisione di $[a,b]$. Definiamo

1) $$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$ (SOMMA SUPERIORE DI f RISPETTO A P.)

2) $$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \cdot (x_k - x_{k-1})$$ (SOMMA INFERIORE DI f RISPETTO A P.)

Definiamo

$$A_f = \{ s(f,P) \mid P \text{ suddivisione di } [a,b] \}$$

$$B_f = \{ S(f,P) \mid P \text{ suddivisione di } [a,b] \}$$

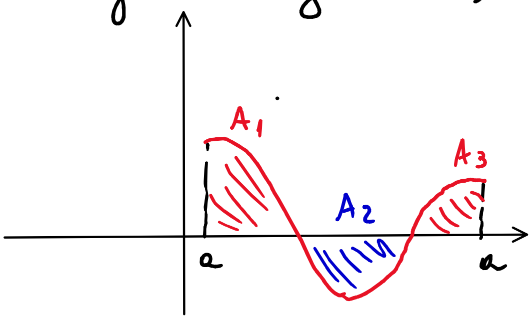
Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata. Se $\sup A_f = \inf B_f$ si dice che f è INTEGRABILE (SECONDO RIEMANN) e si definisce INTEGRALE SU $[a,b]$ DI f la quantità

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup A_f = \inf B_f$$

Significato geometrico

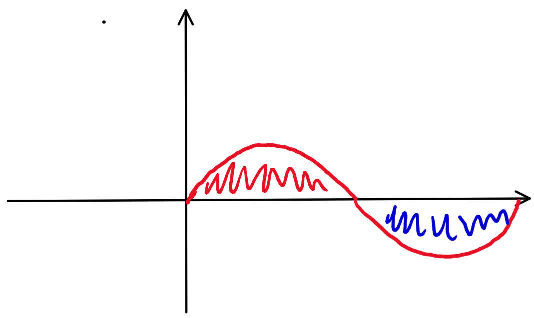
1) Se $f \geq 0$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ è l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x nell'intervallo $[a,b]$.

2) Se f cambia segno, $\int_a^b f(x)\,dx$ è l'area con segno della stessa regione (le parti in cui $f < 0$ vengono contate con segno negativo)



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$$

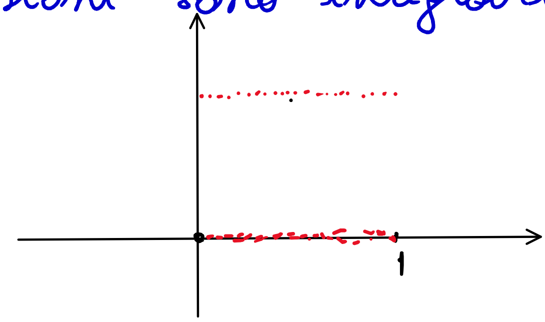
- $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$



Attenzione Non tutte le funzioni sono integrabili.

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

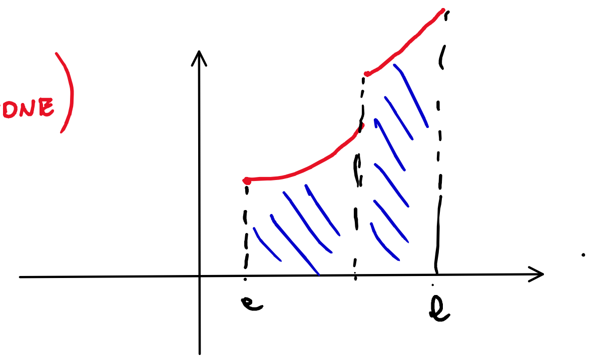


TEOREMA (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ allora f è integrabile in $[a, b]$

TEOREMA (INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI MONOTONE)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è monotona, allora f è integrabile.



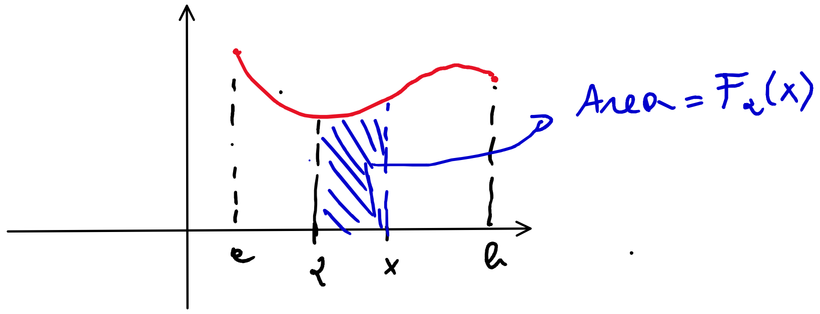
Nota Abbiamo definito $\int_a^b f(x)\,dx$ quando $a < b$. Ma possiamo definire anche:

- Se $a = b$: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- Se $a > b$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Come si calcolano gli integrali?

Def Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$. Fissato $\alpha \in [a, b]$ possiamo definire $F_\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ come

$$F_\alpha(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$$



OSS

F_α è una funzione definita su tutto $[a,b]$.

TEOREMA (I TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e sia $\alpha \in [a,b]$. Allora $F_\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ è derivabile in $[a,b]$ e

$$F_\alpha'(x) = f(x).$$

Def: Sia I un intervallo e sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua in I. Una PRIMITIVA di f è una qualsiasi funzione $F: I \to \mathbb{R}$ tale che F è derivabile in I e $F' = f$ in I.

OSS

Il teorema fondam. del calcolo integrale dice che F_α è una primitiva di f.

ESEMPI

1) $f(x) = 1$

$F(x) = x$ è una primitiva di f

$F(x) = x + 1$ è una primitiva

$F(x) = x + \pi$ è una primitiva $\forall c \in \mathbb{R}$.

$F(x) = x + c$ è una primitiva $\forall c \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \sin x$

$F(x) = -\cos x$ è una primitiva

$F(x) = -\cos x + c$ è una primitiva

OSS Se F_1 e F_2 sono due primitive di $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ t.c. $F_2(x) = F_1(x) + c \quad \forall x \in I$.

DIM

$$g(x) = F_2(x) - F_1(x)$$

$$g'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$\forall x \in I$. Quindi g è costante in I

$$g(x) = c \quad \forall x \in I \Rightarrow F_2(x) - F_1(x) = c$$

$$\Rightarrow F_2(x) = F_1(x) + c$$

TEOREMA DI TORRICELLI (II TEOREMA FOND. DEL CALCOLO INTEGRALE)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ una di f in $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

DIM

Sia $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la funzione integrale di f con estremo a. Per il I teor. fond. del calc. integrale F_a è una primitiva di f.

Allora $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $F = F_a + c$.

$$F(b) - F(a) = F_a(b) + \cancel{c} - (F_a(a) + \cancel{c})$$

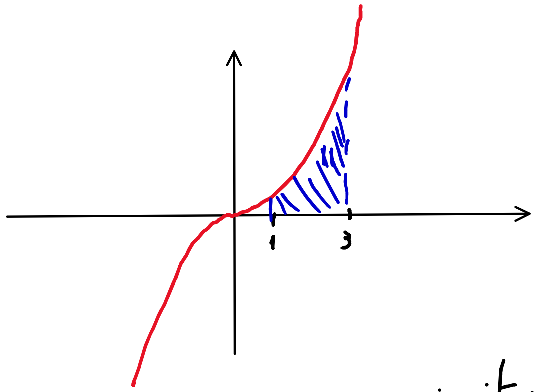
$$= F_a(b) - F_a(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

ESEMPIO

$$\int_1^3 x^3\,dx$$



$f(x) = x^3$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4$ F è una primitiva di f.

$$\int_1^3 x^3\,dx = F(3) - F(1) = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$

Notazione

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b$$

Quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Nell'esempio precedente:

$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

ESEMPIO 2

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0)$$
$$= 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = (-\cos(2\pi)) - (-\cos 0)$$
$$= -1 + 1 = 0$$

ESEMPIO 3

$$\int_0^{\ln 2} e^x\,dx = e^x\Big|_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

Ricapitolando: per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$

1) bisogno trovare $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$.
   (F è una primitiva di f)

2) $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Notazione: Indichiamo con $\int f(x)\,dx$ l'insieme delle primitive di f. (INTEGRALE INDEFINITO DI f)

Se conosciamo una primitiva F, allora

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Gli integrali tra due estremi si dicono invece INTEGRALI DEFINITI

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Integrali indefiniti elementari

- $\int 1\,dx = x + C$
- $\int \alpha\,dx = \alpha x + C$

- $\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$
- $\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C$
- $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \neq -1.$

- $\int x^{-1} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

$$\left(\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| \Big|_{-2}^{-1} = \ln|-2| - \underbrace{\ln|-1|}_{=0} \right)$$

$$= \ln 2$$

- $\int e^x \, dx = e^x + C$
- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$

PROPRIETÀ (LINEARITÀ DEGLI INTEGRALI)

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

$$\int e^x + 4x^3 - \cos x\, dx =$$

$$\int e^x dx + 4\int x^3\, dx - \int \cos x\, dx$$

$$= e^x + 4 \cdot \frac{1}{4} x^4 - \sin x + C$$

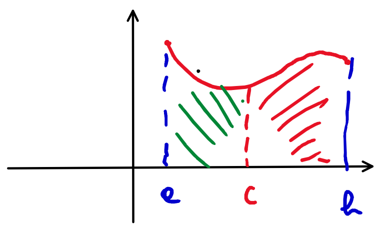
$$= e^x + x^4 - \sin x + C.$$

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DEFINITI

1) $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$

2) Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$ e $a \leq b$
allora $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

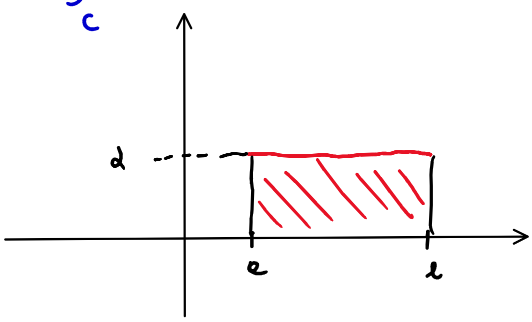
3) $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx$



4) ADDITIVITÀ

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

5) $\int_a^b \alpha\, dx = \alpha(b-a)$

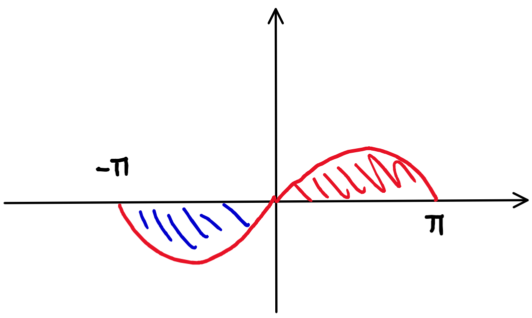


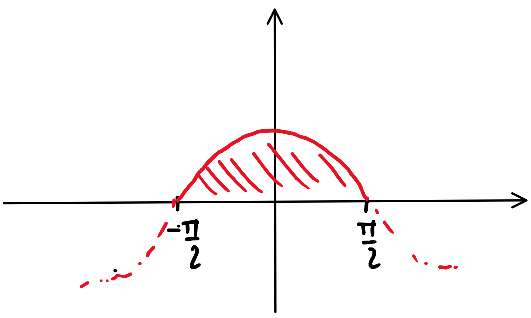
6) Se $f: [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ è dispari:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

7) Se $f: [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ è pari

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$$





$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= 2\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2$$

ESEMPI:

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\left(\frac{1}{2} e^{2x}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}} e^{2x} \cdot \cancel{2} = e^{2x}$$

$$\int e^{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$\int e^{4x-1}\, dx = \frac{1}{4} e^{4x-1} + C$$

Ricordare $\int e^{\alpha x+\beta}\,dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x+\beta} + C.$

OSS: In generale, se F è una primitiva di f allora

$$\int f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x+\beta) + C$$

$$\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

$$\int \sin(4x-5)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(4x-5) + C.$$

$$\int \cos\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C.$$

Ricordare:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$$

DIM

$$\left(\ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

$$\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{\overset{f'(x)}{3}}{\underset{f(x)}{3x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$$

Ricordare

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

- $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\underset{f(x)}{\cos x}}\,dx = -\int \frac{\overset{f'(x)}{-\sin x}}{\underset{f(x)}{\cos x}}\,dx$$

$$= -\ln|\cos x| + C.$$

- $$\int \frac{x}{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overset{f'(x)}{2x}}{\underset{f(x)}{x^2+5}}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+5| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+5) + C$$

PROPRIETÀ

$$\int f(x)^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1} f(x)^{\alpha+1} + C$$

$$\int \underbrace{\sin^2 x}_{f(x)^2}\cdot\underbrace{\cos x}_{f'(x)}\,dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int (\arctan x)'\,\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\arctan^2 x + C.$$